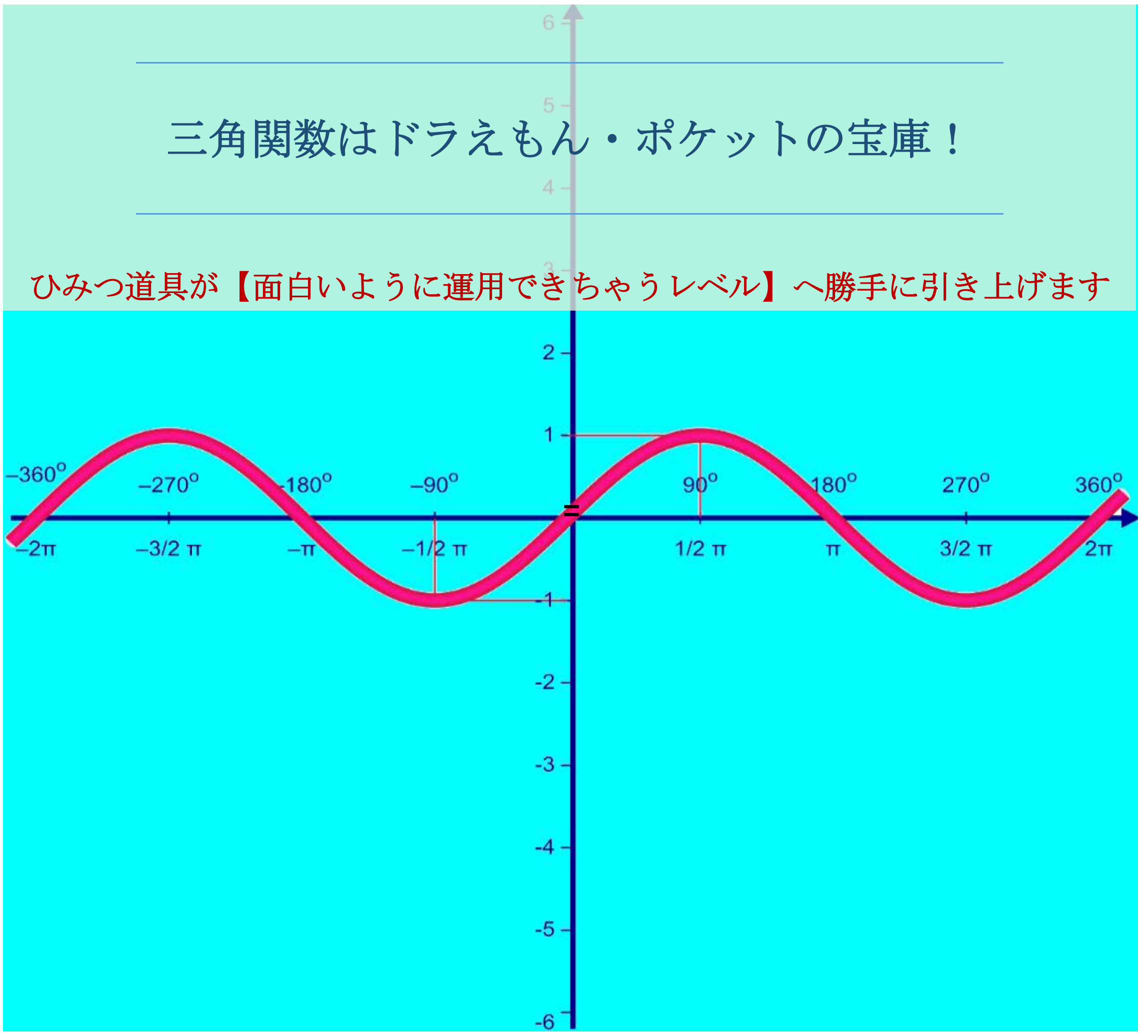
三角関数　はじめの一歩

ー感動！ガリレオ流 帝都大学への数学　vol.2ー

三角関数はドラえもん・ポケットの宝庫！

ひみつ道具が【面白いように運用できちゃうレベル】へ勝手に引き上げます



三角関数はいたって公式が多いように見えますが、ほとんどは枝葉です。

公式の丸暗記に神経を使っているようでは、数学ができない子だと看破されます。
実は、覚えておかねば面倒だというような基本公式は数えるほどもありません。

母なる『加法定理』だけ理解し、頭の中に単位円と三角定規だけを用意してください。
公式をイメージと関連付けておけば君の脳にドラえもん・ポケットは完成します！

==

発行日：2009 年 5 月 30 日

著者：二三五　八十三（フミコ　ハトミ）

発行元：「帝都大学へのビジョン」事務局

http://teito-vision.sunnyday.jp

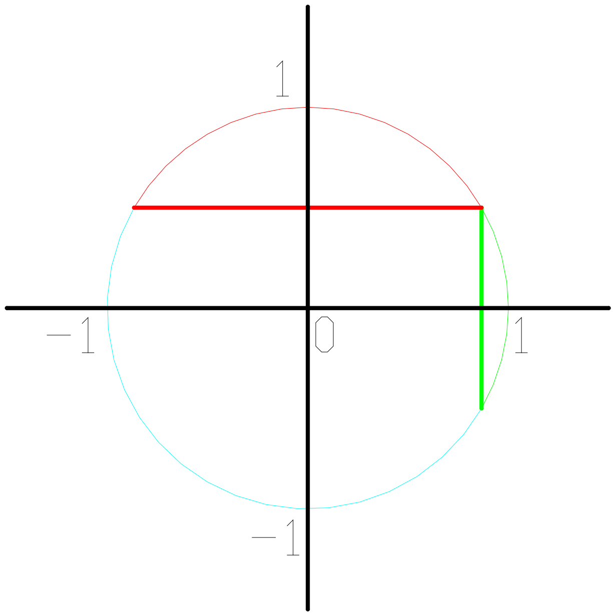
teito-vision@ts.sunnyday.jp

==

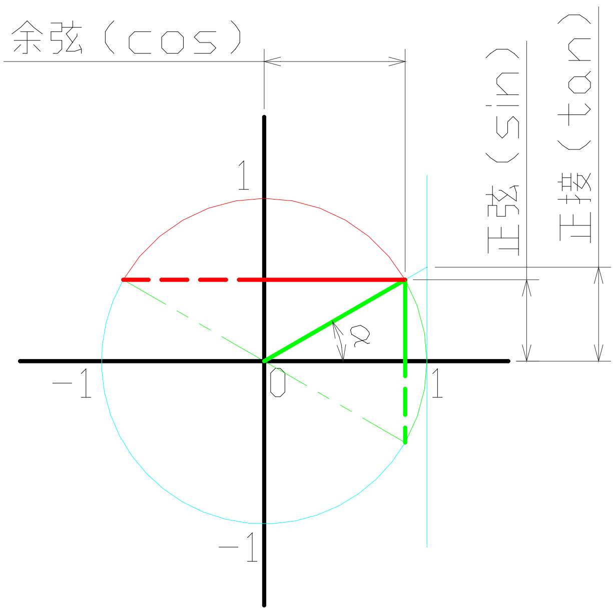
Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

sin（正弦）、cos（余弦）、tan（正接）は、
そもそも円の属性である「弦」に関する概念なのね。

下の図で、緑線の円弧に対応する弦と、赤線の円弧に対応する弦の長さを
求めるというところからその概念が出てきたんだね。



で、「弦の長さを考えるにあたっては、長さの半分で説明すればいいじゃないか」
なんてことになったのだろうね。
下の図のように、４分の１円（この図では第１象限）で概念が確立されることになる。



Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第１章：三角関数の意味・概念をイメージで焼き付ける

図のように、第１象限内の任意の半径線（動径）が x 軸となす角度を α と定義してやり、

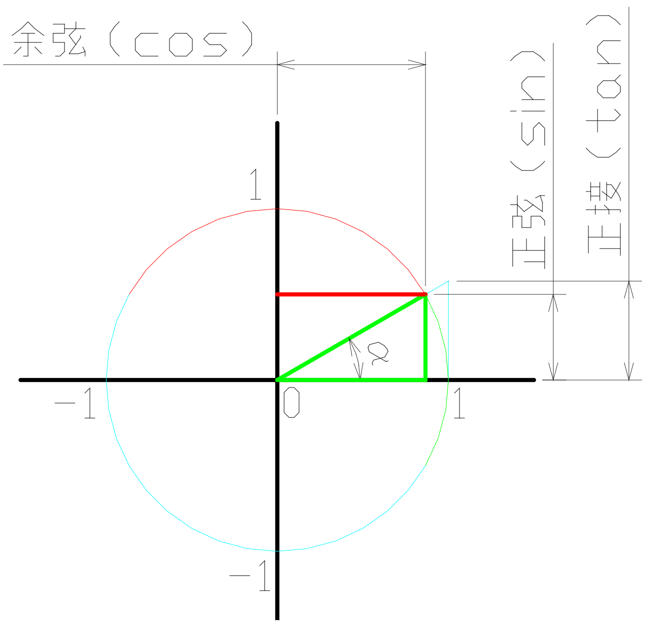
x 軸を対象軸とした角度 2α が作る弧（劣弧：図では緑細線）に対応する弦の半分を、
「角度に対して対応している弦」という意味で、角度 α に対する sin （正弦）と呼ぶ。

４分の１円を考えたとき、角度 α から 90度 までの角を「角度 α の余角」と呼ぶ。

y 軸を対象軸とした余角の２倍の角度が作る弧（劣弧：図では赤細線）に対応する
弦の半分を、「余角に対応している弦」という意味で、角度 α に対する cos （余弦）と呼ぶ。

ところで、これらの弦は、必ず、円の内部に出来るよね。
そこで、円弧の両端における接線に対し、弦と似た性質のものを定義すると・・・。
ここから生まれたのが、
任意の半径線の延長線と任意の半径線とは反対側の円弧の端点における接線との
交点と他端との長さを tan （正接）と定義した。
（言葉で言えばややこしいが、図で理解すれば充分！図では青細線）

前頁の図から、要らない線を取っ払ってみると下図のようになる。
結局、sin （正弦）、cos （余弦）、tan （正接）は、下図のように
斜辺の長さが１の直角３角形において、斜辺以外の２辺の長さを表す概念と同じ意味。



この図が、sin （正弦）、cos （余弦）、tan （正接）の概念を全て表すわけよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 2 章:公式に神経を使わない一歩

三角関数の公式を暗記しようとする人があります。
もちろん、数学が出来る子も暗記はしていますよ。
が、決定的な違いがあることに気が付いてください。

- 度忘れしても、自分で導き出せる
- 暗記することが目的で暗記はしていない。
  語呂合わせ的に覚えているが、あくまで、トレーニングの結果
  自然に身に定着させている。

もちろん、暗記しておけば便利ですし、普通はたいてい暗記しています。
しかし、もし、度忘れしても（たいてい、符号がどっちだったとか、sin と cos
どっちだったとかで悩んだりします）、その場で検証できるようにしておけば
不安はなくなります。

記憶なんてものは、使っていればなんとなく覚えているものです。
そして、使い込んでいれば、自然に記憶に定着してきます。

覚える必要すらない（その場で考えればすぐに出てくる）ものもたくさんあります。
「意味不明」のまま進んでいるから、どこかの大学に合格するまで絶えることなく
「暗記しなくっちゃ」という脅迫概念に囚われることになるのですね。
たった数時間、しっかりと意味を考える時間を取り、実際に運用してみることこそが
最良の「暗記」なのに、もったいないことです。

理想の形を言っておきましょう。
基本公式は、トレーニングによって完璧に身に付いており
（暗記されている）、且つ、度忘れしても導ける。

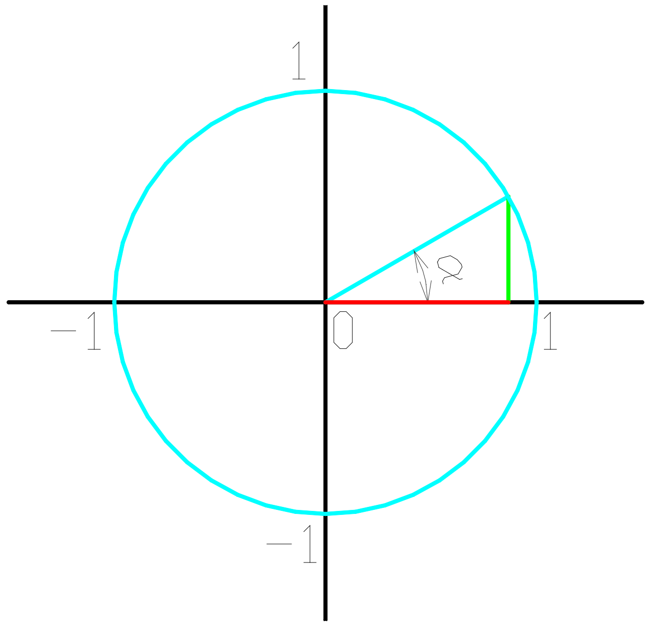
それでは、本章から三角関数の公式を順に斬っていくね。
それにあたって、注意して欲しいことをまず書いておくね。
ここからは、座標平面として、正負を考慮していく
ことを肝に銘じておいて！

とにかく、単位円の中に直角三角形定規を配置する。
三角関数の単元では、これだけで事足りる公式が、
教科書でも参考書でも、まず最初に出てきます。
暗記など必要の無い代表的な公式。その場でも１秒で出る公式たちです。
第 2 章では、ここから崩していきます。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

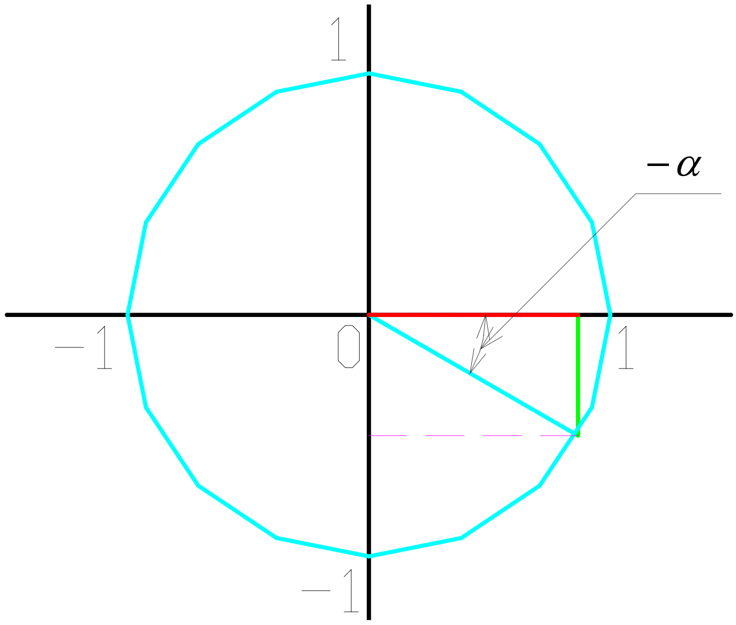
第 2 章：公式に神経を使わない一歩

［図１］角度 $-\alpha$ の $\sin$, $\cos$ を、基本角度 α で置き換える



緑の線は角度 α に対する $\sin$ 、すなわち $\sin\alpha$ ・・・符号は＋
赤の線は角度 α に対する $\cos$ 、すなわち $\cos\alpha$ ・・・符号は＋

↓では、直角三角形の配置を変えてみます。↓



定義より、緑の線は角度 $-\alpha$ に対する $\sin$ 、すなわち $\sin(-\alpha)$ ・・・符号は－
定義より、赤の線は角度 $-\alpha$ に対する $\cos$ 、すなわち $\cos(-\alpha)$ ・・・符号は＋
よって、

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\end{aligned}}$$

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：三角関数の母なる「加法定理」を知る

本章では、三角関数の心臓とも言って過言ではない最も基本の公式
「加法定理」について、同じようにイメージから捉えてみるよ。

「加法定理」の公式は、1 秒や 2 秒では出てこない！
だから、普通は、「加法定理」はリズム感で暗記しているものなのね。
たとえ忘れたと言っても、「符号がどっちだったかなぁ？」ぐらいだね。

完全に忘れた場合、導き出すにはちょっと手間がかかるから、
やはり、これだけは完璧に覚えておくべきだろうね。
だからと言って、先ほども述べたように丸暗記は、君に何も力を与えはしない。

くどいようだけれども、
いざのときには導き出せる。
そのことこそが大切さ。

さらに、次章から、合成や倍角の公式・3 倍角の公式・半角の公式、
さらには和⇔積変換の公式がわんさか出てくるけれども、
これらは全て、この「加法定理」から出て来るのね。
うんざりするほど沢山書いてある公式群の多くは、「加法定理」が源というわけね。

そして、導出するのにとても手間がかかるのなら話は別だけれど、これらの多くは
ほとんど手間がかからないから、「加法定理」さえ理解し覚えておけば、
多くの公式は覚えなくてもノープロブレムというほどなんだね。

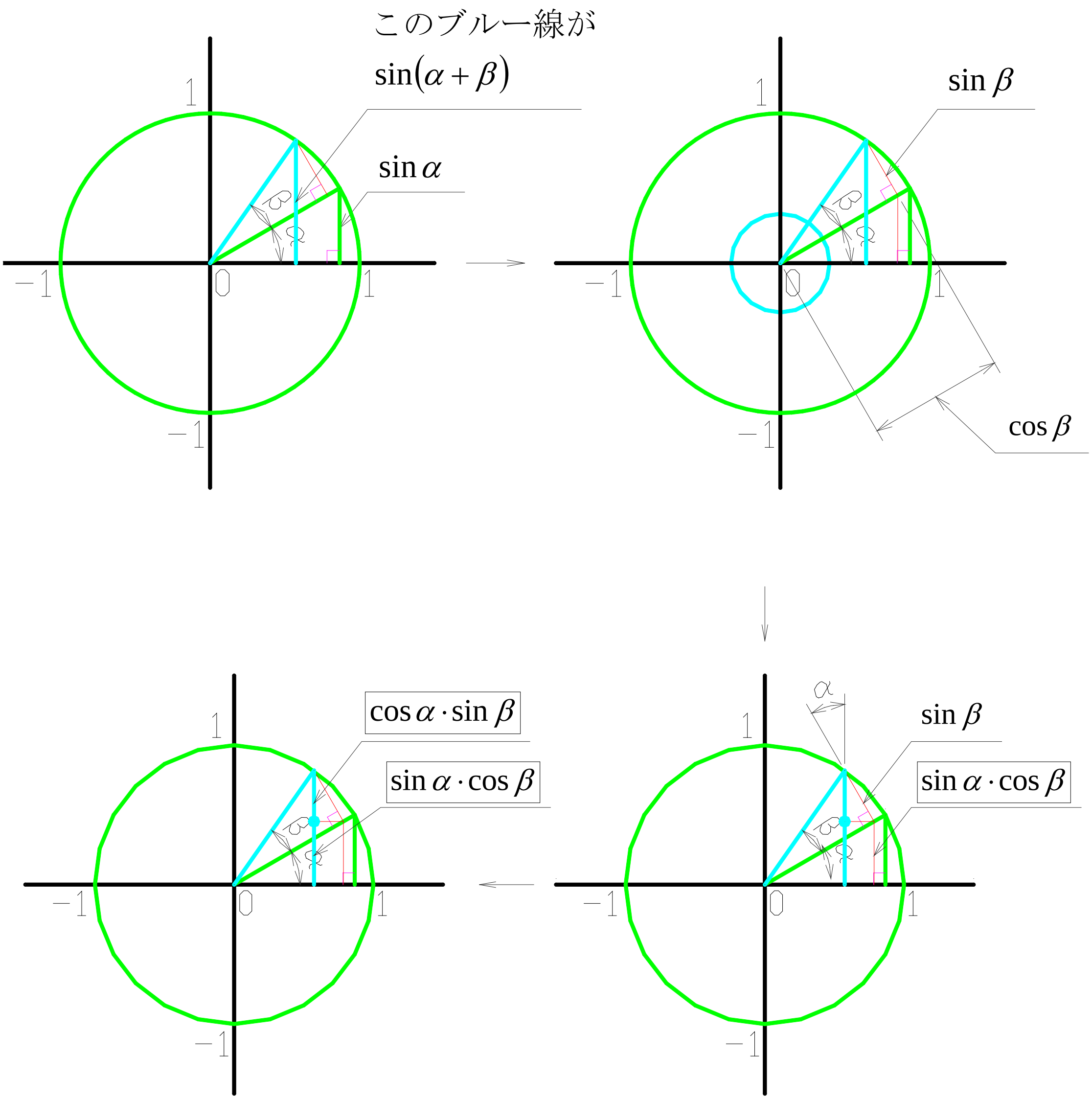
それは、次章以降読んでもらえれば分かるはずだから、
まずは、この「加法定理」をしっかり理解し、公式としても覚えておこう。
リズム感で覚えれるし、トレーニングを積むことで記憶に定着する。

そうすれば、君も三角関数に関しては、土台がしっかり出来たことになるわけよ。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 3 章：三角関数の母なる「加法定理」を知る

[図 3-1s]「加法定理」の概念をイメージで理解する図（sin 編）



矢印の順に考えていくと、ここに、

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ・・・[公式 03k-sp]　という公式が出てくる。

出てきた結果は、

サインのプラスはサインコサイン＋コサインサイン

と語呂合わせ的なリズム感で覚えておけばよいね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 4 章:三角関数の合成を逆向きに考える

さて、次に【三角関数の合成】というやつを考えてみる。
本「帝都大学への数学」では、普通とは逆向きに考えていくね。

ここでは、2008 年京都大学前期文系数学の問題［4］の補足説明も兼ねることにする。

前章の加法定理において、
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　・・・[公式 03k-sp]があった。

ならば、
$a\sin\alpha+b\cos\alpha$ という形は $k\sin(\alpha+\beta)$
という形に変身させることが出来るのではないか？

そんな思いがよぎらないかい？

なぜなら、
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ は、左右の項を入れ替えて書いてみると、
$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

もし、$a=\cos\beta, b=\sin\beta$ だと置いてやれるなら、
$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)$ になっちゃうから・・・。

あるいは、逆に
$a\sin\alpha+b\cos\alpha$　において、
もし、$a=\cos\beta, b=\sin\beta$ と置いてやれるなら、
[公式 03k-sp]の右辺そのものになるのだから・・・。

なんだか、深い関係がありそうなことが予想される閃きだった。

ただ、三角関数には、第 1 章で述べたように、
畏れ多くも、$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$　という性質がある。
そうすると、「もし、$a=\cos\beta, b=\sin\beta$ と置いてやれるなら」と軽く書いたけれども、
これは、$a^2+b^2=1$ でなければならないという制約ができてしまうことを意味する。

どんな a と b であっても、置き換えられなければ意味が無いじゃないか！

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

ということで、

なら、$a\sin\alpha + b\cos\alpha$ という形を

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

と変形してみたらどうだろうか？

これなら、

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$ となるから

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$$ と考えることができる

これで初めて、

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

とすることができる。

すなわち、

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$$

但し、$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

という形に表せることになる。

$\sin$ と $\cos$ の和の形の式が、$\sin$ だけの式として表すことができた。
これが、三角関数が合成されたということね。

実は、三角関数の合成は、加法定理が姿を変えたものに他ならないということね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第5章：倍角の公式・3倍角の公式・逆倍角の公式（半角の公式）

さて、倍角の公式や3倍角の公式も、加法定理から意図も簡単に導き出されるのね。
そのことを、一通り通過しておこう。

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

・・・[公式 05ds-01]・・・2秒で出来る

語呂合わせの覚え方例→サイン2αは（2サインコサイン）

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

・・・[公式 05dc-01]・・・5秒で出来る

語呂合わせの覚え方例→コサイン2αの原型は（コサイン2乗ーサイン2乗）
そして、（2コサイン2乗ー1）、
あるいは（1ー2サイン2乗）

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha \\ &= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

・・・[公式 05ts-01]・・・30秒で出来る

語呂合わせの覚え方例→サイン3αは（3サインー4サイン3乗）

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha \\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

・・・[公式 05tc-01]・・・30秒で出来る

語呂合わせの覚え方例→コサイン3αは（4コサイン3乗ー3コサイン）

全ては、加法定理を出発点とすれば、簡単に出てくるということだね。
でも、この程度は単なる暗記でも覚えやすい範囲だから、
トレーニングさえ積めば自然に体で覚えていることだろう。

倍角の公式では、角度 2α の $\sin$ ・ $\cos$ を基準角度 α の $\sin$ と $\cos$ で表せたね。
これを、逆向きに、角度 α の $\sin$ ・ $\cos$ を角度 2α の $\sin$ と $\cos$ で表せれば・・・。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第５章：倍角の公式・3 倍角の公式・逆倍角の公式（半角の公式）

すなわち、ある角度をその２倍側の角度から見ると、
これが、逆倍角の公式（半角の公式）に他ならないんだね。

では、逆倍角の公式（半角の公式）を導出してみよう。

倍角の公式・・・$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

↓

$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

↓

$\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ・・・[公式 05hc-01a]・・・逆倍角の公式[cos 版]　導出完了！

↓

2α を基準にして表現したい場合は、$2\alpha \to \alpha$ と置き換えると、当然、$\alpha \to \dfrac{\alpha}{2}$

↓

$\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos \alpha}{2}$ ・・・[公式 05hc-01b]・・・逆倍角の公式[cos 版]　導出完了！

語呂合わせの覚え方例→コサイン２乗の半角は（1＋コサイン）の 1/2

倍角の公式・・・$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

↓

$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

↓

$\sin^2 \alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ・・・[公式 05hs-01a]・・・逆倍角の公式[sin 版]　導出完了！

↓

2α を基準にして表現したい場合は、$2\alpha \to \alpha$ と置き換えると、当然、$\alpha \to \dfrac{\alpha}{2}$

↓

$\sin^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos \alpha}{2}$ ・・・[公式 05hs-01b]・・・逆倍角の公式[sin 版]　導出完了！

語呂合わせの覚え方例→サイン２乗の半角は（1－コサイン）の 1/2

要は、倍角の公式を逆向きに変形しただけの公式ということね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 6 章:積 ⇔ 和の公式は「加法定理」から

三角関数やる上で、「覚えておくべきなのか？」という思いで一番迷うところだろうね。
結論としては、覚えておいた方が処理が早くなるのは間違いない。
だから、語呂合わせ的な覚え方の例だけ下に示しておくね。

けれども、感覚だけ覚えておけば充分でもあると思うよ。
これら【積 ⇔ 和の公式】も全て、「加法定理」からすぐに出てくるのだから・・・。
「加法定理」をもう一度上挙げておこう。

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ・・・[公式 03k-sp] ・・・(1)
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ・・・[公式 03k-sm] ・・・(2)
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ・・・[公式 03k-cp] ・・・(3)
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ・・・[公式 03k-cm] ・・・(4)

(1) ＋ (2)
$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow \quad \sin\alpha\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ ・・・[公式 06sw-sc] ・・・(5)

語呂合わせの覚え方例→サインコサインはサイン＋サイン

(1) ー (2)
$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$ ・・・[公式 06sw-cs] ・・・(6)

語呂合わせの覚え方例→コサインサインはサインーサイン

(3) ＋ (4)
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ ・・・[公式 06sw-cc] ・・・(7)

語呂合わせの覚え方例→コサインコサインはコサイン＋コサイン

(3) ー (4)
$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \quad \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ ・・・[公式 sw-ss] ・・・(8)

語呂合わせの覚え方例→サインサインは（コサインーコサイン）のマイナス

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

第 6 章：積 ⇔ 和の公式は「加法定理」から

さて、公式 (5) ～ (8) において、

$\alpha+\beta=A$　・・・(a)

$\alpha-\beta=B$　・・・(b)　　と置いてみよう。

(a) ＋ (b)　$\Rightarrow$　$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$

(a) ー (b)　$\Rightarrow$　$\beta=\dfrac{A-B}{2}$　　と置き換えることができるね。

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$ ・・・[公式 06sw-sc]

$$\Downarrow$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$ ・・・[公式 ws-sps]

語呂合わせの覚え方例→サイン＋サインは 2 サインコサイン

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$ ・・・[公式 sw-sc]

$$\Downarrow$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$ ・・・[公式 ws-sms]

語呂合わせの覚え方例→サインーサインは 2 コサインサイン

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$ ・・・[公式 sw-sc]

$$\Downarrow$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$ ・・・[公式 ws-cpc]

語呂合わせの覚え方例→コサイン＋コサインは 2 コサインコサイン

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$ ・・・[公式 sw-sc]

$$\Downarrow$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$ ・・・[公式 ws-cmc]

語呂合わせの覚え方例→コサインーコサインは 2 サインサイン

ともかく、リズム感で覚えた後は、チャート式で運用に慣れることだね。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

■発展問題 1

次の問いに答えよ。

1) $\sin 20° + \sin 40° = \sin 80°$ を証明せよ。

2) $8\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 80° = \sqrt{3}$ を証明せよ。

---

1) $\sin 20° + \sin 40° = \sin 80°$ を証明せよ。

和 $\Rightarrow$ 積の公式により、

$$\begin{aligned}\sin 20° + \sin 40° &= 2\sin 30° \cos 10° \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \cos(90-80)° = \sin 80°\end{aligned}$$

脳細胞の出発点　：　サイン＋サインは 2 サインコサイン（和 $\Rightarrow$ 積の公式）

2) $8\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 80° = \sqrt{3}$ を証明せよ。

積 $\Rightarrow$ 和の公式により、

$$\begin{aligned}8\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 80° &= 8 \times \frac{1}{2} \times (\cos 20° - \cos 60°) \cdot \sin 80° \\ &= 4\left(\cos 20° - \frac{1}{2}\right)\sin 80° \\ &= 4\cos 20° \cdot \sin 80° - 2\sin 80° \\ &= 4\sin 80° \cdot \cos 20° - 2\sin 80° \\ &= 4 \times \frac{1}{2}(\sin 100° + \sin 60°) - 2\sin 80° \\ &= 2\sin 100° + \sqrt{3} - 2\sin 80° \\ &= 2\sin(180° - 80°) + \sqrt{3} - 2\sin 80° \\ &= 2\sin 80° + \sqrt{3} - 2\sin 80° = \sqrt{3}\end{aligned}$$

脳細胞の出発点　：　3 つの積だから、とにかく 2 つの積を和の形に直してみよう。
→サインサインは（コサイン－コサイン）のマイナス（積 $\Rightarrow$ 和の公式）

もし、公式を忘れたり、正しいか不安のときは、第 6 章の説明のごとく
加法定理を書き出し各式を足し引きすれば、すぐに確認できる！

例えば、

1) ならば、$\sin + \sin$ だから、$\sin(\alpha + \beta), \sin(\alpha - \beta)$ だけ書き出す。

2) ならば、加法定理で $\sin \times \sin$ を項に持つ $\cos(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta)$ だけ書き出す。

Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。

■発展問題2

$3\sin x - 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。
但し、$0° \le x \le 180°$ とする。

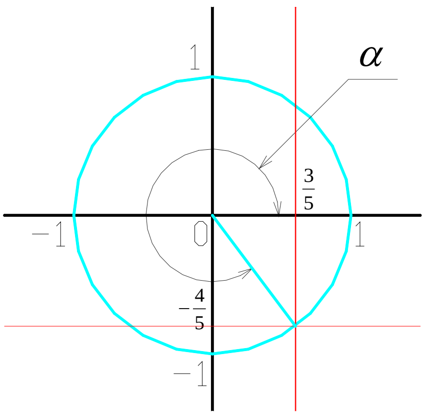
与式を合成すると、

$$3\sin x - 4\cos x = \sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\alpha) = 5\sin(x+\alpha)$$

但し、$\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$

> 三角関数を合成する際は、加法定理を（例えばsin で合成したい場合）
> $\sin(x+\alpha) = \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha$ と書き出しておいて、
> 対照しながら進めると、「但し」以下の α に関する設定の間違いが
> 少なくなる！
> 本問の場合なら、
> $3\sin x - 4\cos x = 5\sin(x+\alpha)$
> $\Downarrow$
> $\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = \sin(x+\alpha)$
> と対照しながら進める。

ここで、α は第4象限内の角度であることが分かる。
（$\because$ cos がプラス、sin がマイナス）



Copyright (C) 2009 「帝都大学へのビジョン」事務局　All Rights Reserved.
http://teito-vision.sunnyday.jp
※当レポートのテキスト・画像等すべての転載転用、商用販売を固く禁じます。