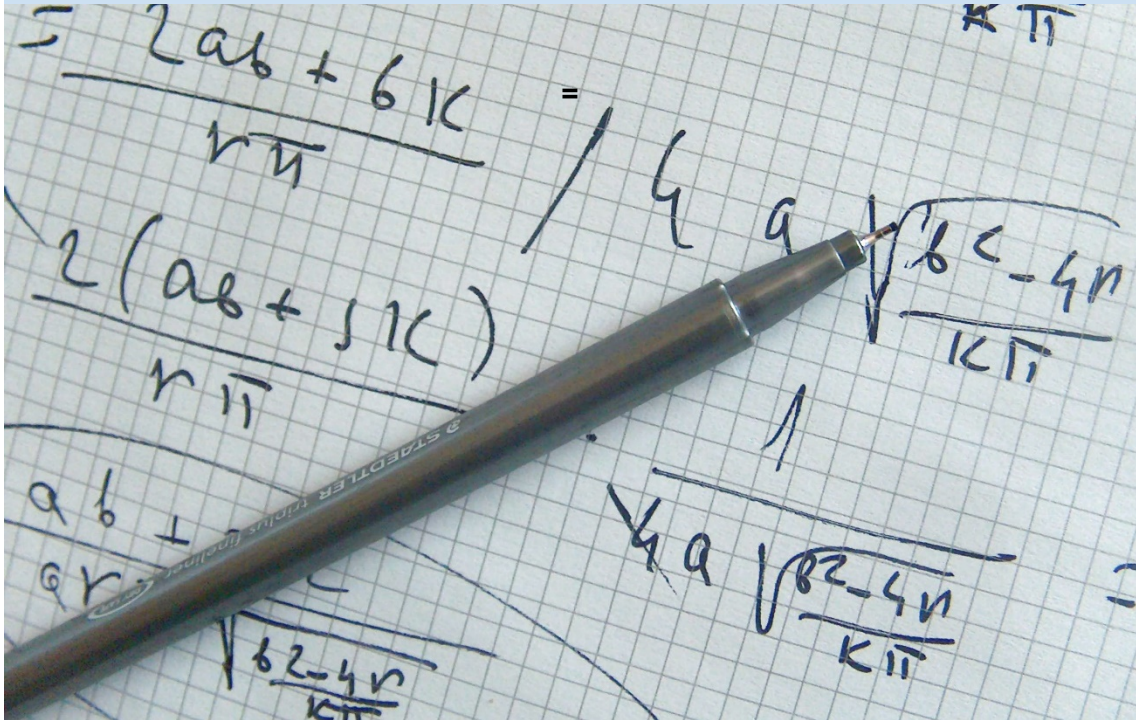


## 面白いほど変幻自在に数式を操れる秘密

つまづいて戻って来たら初めて見えた風景... 【規則性】【方程式との絆】



式の展開と因数分解は実に味気のない単元ですが、力の全てはここに戻って来ます。

戻って来さえすれば、数学が苦手な君にも気づきさえしなかった風景が見えます。  
面白くもないこの単元を淡々とこなして終わった気分の秀才君はまだ見ない風景が。

数学で一貫して要求される「数式を変幻自在に操る力」が生まれるのはこの瞬間！  
この風景を見ることがなければ、公式恐怖症から解放される日は永遠に来ません！

発行日：2009年3月20日

著者：二三五 八十三（フミコ ハトミ）

発行元：「帝都大学へのビジョン」事務局

<http://teito-vision.sunnyday.jp>

[teito-vision@ts.sunnyday.jp](mailto:teito-vision@ts.sunnyday.jp)

## 第1章：公式を追うものは規則性を見ず ～公式はまず規則性で感じよ！～

この章では、まず、

式の展開や因数分解に潜んでいる「規則性」を感じてもらう

ことが目的です。

その「規則性」に関する詳しい説明は、第4章にてじっくりとしますので、今は、とにかく感じてもらうだけで結構です。

何故なら、その前の第3章で、因数分解と密接な関係にある因数定理や方程式の基礎知識を固めてもらった方が、よりいっそう理解しやすくなるという理由からです。

そして、第4章では、「規則性」という視点からだけでなく、式相互間の間柄、すなわち「交流性」という視点からも眺め、式の変形の全貌を掴んでもらおうと思います。

### 【\*注記\*】

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  のように薄緑で色付けしてあるのは、教科書や参考書からピックアップした公式です。

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$  のように黄色で色付けしてあるのは、一般的な規則性を表した式です。

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$  のように青で色付けしてあるのは、準公式または頻出の活用式を表しています。

## 第1章：公式を追うものは規則性を見ず ～公式はまず規則性で感じよ！～

### 1) 因数分解の公式をピックアップ

まずは、教科書や参考書に載っている因数分解の公式をピックアップしてみるね。

重要で、且つ、頻繁に利用されている公式は、たかだか下記の程度なんだよ。

$$\text{公式 12m} : a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{公式 13p} : a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{公式 13m} : a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{公式 22p} : a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\text{公式 22m} : a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\text{公式 23p} : a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$\text{公式 23m} : a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$\text{公式 2np} : \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r = (a + b)^n \quad \cdots \text{二項定理 (第5章)}$$

$$\text{公式 25nm} : \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} (-b)^r = (a - b)^n$$

「規則性」に関しては、この後すぐに感じてもらうけれど、

ここでは、一つだけコメントしておくね。

**右の公式は、左の公式において  $b$  を  $-b$  と置き換えれば自然に出てくる！**

[公式 12m]と左の3つの公式だけが、全ての基礎になっていると言えるんだね。

「符号はどっちだったっけ？」なんて友達と言いつけていること自体、

「私は公式を意味も分からず暗記しています」と言いふらしているようなものなんだよ。

第1章：公式を追うものは規則性を見ず ～公式はまず規則性で感じよ！～

2) 因数分解の公式を「規則性」で感じる

**[規則性 1m]**  $a^n - b^n$  の規則性

$$a - b$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \dots [公式 12m]$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \dots [公式 13m]$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

⋮

⋮

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

どうかな？

感じてもらえただろうか？この規則性。

4次式は、ちょっと普通の因数分解とは違うけれどね・・・。

厳密に言えば、因数分解はまだしきっていない式になっている。

でも、ここまで並べれば、

$a^7 - b^7 = ?$  と問われても、君ならば、もう予想できるんじゃないか？

この規則性は、第3章を理解してから、第4章でさらに深めていくね。

第1章：公式を追うものは規則性を見ず ～公式はまず規則性で感じよ！～

**[規則性 1p]  $a^n + b^n$  の規則性**

$$a + b$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \dots [公式 13p]$$

$$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) + 2b^4$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^6 + b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5) + 2b^6$$

⋮

⋮

n が奇数のとき

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

n が偶数のとき

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - a^2b^{n-3} + ab^{n-2} - b^{n-1}) + 2b^n$$

どうかな？

感じてもらえただろうか？この規則性。

偶数乗+偶数乗は、因数分解とはなっていないけれどね・・・。

でも、ここまで並べれば、

$a^7 + b^7 = ?$  と問われても、君ならば、もう予想できるんじゃないか？

この規則性は、第3章を理解してから、第4章でさらに深めていくね。

第1章：公式を追うものは規則性を見ず ～公式はまず規則性で感じよ！～

[規則性 1mx]  $x^n - 1$ の規則性・・・[規則性 1m]の頻出タイプ

$$x - 1$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad \dots \text{[頻出 12m]}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad \dots \text{[頻出 13m]}$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

⋮

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

どうだい？

実に分かりやすいね！この規則性。

[規則性 1px]  $x^n + 1$ の規則性・・・[規則性 1p]の頻出タイプ

$$x + 1$$

$$x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1) + 2$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \dots \text{[頻出 13p]}$$

$$x^4 + 1 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 2$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$x^6 + 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) + 2$$

⋮

n が奇数のとき

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + x^2 - x + 1)$$

n が偶数のとき

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x^2 + x - 1) + 2$$

どうだい？

実に分かりやすいね！この規則性。

## 第3章：犬も歩けば因数に当たる？ ～方程式と因数分解の秘密な関係～

「何のために因数分解するのか？」の一つの大きな理由として、  
「方程式を解くため」ということは分かっただろうか？

そこで、因数分解を理解する上でも、方程式を解く上でも重要な鍵を握る  
「**因数定理**」について、まず理解しておいてもらおう。

### 1) 因数定理

「**因数定理**」は、あまりにも有名な定理なんだね。

多項式  $f(x)$  に関して、 $f(a)=0$  となる  $a$  が存在すれば、  
 $f(x)$  は  $(x-a)$  を因数に持つ。

もっと、噛み砕いて言えば、

与えられた多項式  $f(x)$  で  $x$  に  $a$  を代入して、値が0になる  
ならば、 $f(x)$  は  $(x-a)$  を因数に持つ。

別段、難しいことは何もない定理だろう？

けれども、**方程式の解を求める方法の一つ**としてなくてはならないんだ。  
特に、3次以上の高次方程式の場合に、とても役に立つことになる。

ここで、いきなり  $f(x)$  という記号が出て来るんだけど、  
この  $f(x)$  が、以外に分かっていないケースが多いんだね。

これは、別講座で「関数とは？」を予定しているので、  
そこで、詳しく説明しようと思っているのだけれども、結論はシンプル！  
今は、「**関数とは、なんらかの演算をする装置**」という風に考えておいて。  
 $x$  という材料を投入したら、その材料を使って、決められている演算  $f$  (*function*)  
によってアウトプット  $f(x)$  を出す装置だと考えておけば良いね。

では、最初に、小学校の割り算を思い出してもらおうか。

### 30 割る 7 は答え 4 余り 2

式で書けば、 $30 \div 7 = 4 \cdot \cdot \cdot$  余り 2

余りは、割る数 7 より小さいはずだね。

これを、逆向きに書けば、 $30 = 7 \times 4 + 2$  だったね。

## 第3章：犬も歩けば因数に当たる？ ～方程式と因数分解の秘密な関係～

さて、中学生になり、数が式になりました。  
でも、ある式を別のある式で割るということは、  
理屈は、数と同じように考えればいいだけなのね。

ある式  $f(x)$  を別のある式  $g(x)$  で割ることを考えてみようか。

数の場合と同じように考えて、

$$f(x) \div g(x) = Q(x) \cdot \dots \text{余り } R(x)$$

逆向きに書けば、 $f(x) = g(x) * Q(x) + R(x)$  となるね。

$R(x)$  は、割る式  $g(x)$  よりも次数が低くなる。

ここで、割る式  $g(x)$  が、2項の一次式（例えば、 $x-a$ ）だとすれば、  
余り  $R(x)$  は、割る一次式  $g(x)$  よりも次数が低い、すなわち定数になる。  
だって、 $R(x)$  が一次式だったら、  
「まだ割れるぜ！君の怠慢だ！」ってことになるからね。

このことから、

**多項式  $f(x)$  を、2項の一次式  $(x-a)$  で割ったとき、余りは定数  $r$  となる。**

すなわち、 $f(x) = (x-a)Q(x) + r$  となるということ。

ここで、 $x=a$  のときを考えてみようか。

$$f(a) = (a-a)Q(x) + r = r \quad \text{となるね。}$$

$(x-a)$  で割ったときの余り  $r$  は、  
多項式  $f(x)$  において、 $x=a$  としたときの値  $f(a)$  に他ならないということ。

この真実を、『**剰余定理**』と申し上げるんだ。

すなわち、『**剰余定理**』とは、

多項式  $f(x)$  を2項の1次式  $(x-a)$  で割ったとき、余りは  $f(a)$  となる。



## 第3章：犬も歩けば因数に当たる？ ～方程式と因数分解の秘密な関係～

では、余りが出ないとき、すなわち割り切れるときはどうかな？

$f(x) = (x-a)Q(x)$ で表せるということだから、

言い方を変えれば、

多項式  $f(x)$  において、 $x=a$  としたときの値  $f(a)$  が0であれば、

$f(x)$  は因数分解ができて、且つ、 $(x-a)$  を因数に持つということね。

すなわち、『**因数定理**』とは、

『**剰余定理**』において剰余  $f(a)$  が0になる場合のことに他ならないわけね！

多項式  $f(x)$  において、 $f(a)=0$  となる  $a$  が存在すれば、 $x-a$  を因数に持つ。

別の表現をすれば、

多項式  $f(x)$  が  $(x-a)$  で割り切れれば、 $f(a)=0$

『**因数定理**』は、ややこしい高次の多項式などで、

まず**1次式の因数を見つけてやるのに非常に便利だ**というわけで、

大変、貴重な定理だから頻繁に使われる。

もちろん、二次式の因数分解だって、タスキがけで探す方法だけでなく、

因数定理で探す方法を使っても構わないね。

### [具体例1]

$f(x) = x^2 - a^2$  のとき、

$x$  に  $a$  と  $-a$  を入れてみようか。

$f(a) = a^2 - a^2 = 0$  だし、 $f(-a) = (-a)^2 - a^2 = 0$  と、ともに値が0になるね。

だから、 $(x-a)$  を因数に持ち、また、 $(x+a)$  も因数に持つ。

ということは、 $(x+a)(x-a)$  を因数に持つということだね。

$f(x)$  は2次式で、 $(x+a)(x-a)$  も2次式だから、

これ以上の因数はなくて、あとは符号と係数だけがつつまが合うようにしてやればよい。

$x^2$  の係数を見てみると、 $f(x)$  も  $(x+a)(x-a)$  もともにプラスで係数は1だから、

そのまま等号で結べば良いことになる。

## [1]対称式とは？

第7章では、3文字に関する因数分解の公式を証明したね。

$$\text{公式 32a: } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(bc + ca + ab) \cdot \cdot \cdot (32a)$$

$$\text{公式 33: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdot \cdot \cdot (33)$$

さて、公式 33 の右辺には、公式 32a の主役  $a^2 + b^2 + c^2$  がそのまま鎮座しているね。なら、公式 33 に公式 32a を代入しておこうか。

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} \cdot \cdot \cdot (33r)$$

[公式 33] よりも、より綺麗だとは思わないかい？

では、 $a^4 + b^4 + c^4$  はどうなるのだろうか？ と気になってきた。

ここでは、(32a) (33r) に準じる形として、結論だけを示しておくよと、

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 - 4abc(a + b + c) - 2(ab + bc + ca)^2 &\cdot \cdot \cdot (34r) \\ = (a + b + c)^2 \{(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca)\} \end{aligned}$$

(34r) の計算プロセスを示しておくよと、

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \\ &= \{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)\}^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= (a + b + c)^4 - 4(a + b + c)^2(ab + bc + ca) + 4(ab + bc + ca)^2 - 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc(a + b + c) \\ &= (a + b + c)^4 - 4(a + b + c)^2(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc(a + b + c) \\ &= (a + b + c)^2 \{(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca)\} + 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc(a + b + c) \\ &= (a + b + c) \{(a + b + c)^3 - 4(a + b + c)(ab + bc + ca) + 4abc\} + 2(ab + bc + ca)^2 \end{aligned}$$

第8章：式は口ほどにもの言う ～美しき対称式・交代式と因数分解～

[補足説明]

式の途中に出てくる  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$  に関しては、

2乗+2乗+2乗の形だから、公式 32a を適用することによって、

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \text{ と変形できる。}$$

結論として、(32a) (33r) (34r) は、規則性があるようでもあり、ないようでもあり、計算プロセスを見るだけではなかなかつかみ難いよね！

そこで、次の重要例題で、解きほぐしていくことにするね。

この重要例題は、例題自体が問題になることも多いので、しっかり理解のこと！

**[重要例題 1]**

$a + b + c = p, ab + bc + ca = q, abc = r$  とおく。

このとき、 $a^3 + b^3 + c^3$  と  $a^4 + b^4 + c^4$  を、それぞれ  $p, q, r$  で表せ。

$$a + b + c = p \dots (1)$$

$$ab + bc + ca = q \dots (2)$$

$$abc = r \dots (3)$$

■脳細胞の働き方 オーソドックス編■

[1]  $a^3 + b^3 + c^3$  について

問題には、 $a^2 + b^2 + c^2$  が問われていないけれど、何故だろう？

一つには、 $a^2 + b^2 + c^2$  は公式として認知されているということ。・・・[公式 32a]

もう一つは、 $a^2 + b^2 + c^2$  から紐解けば、以降はすぐに糸口が見つかるだろうから。

さて、 $(a + b + c)^2$  の展開から簡単に導くことのできる

公式 32a :  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(bc + ca + ab)$  より、

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q \dots (4)$$

## [1]因数分解の定石！

因数分解をするための具体的な定石なんだけれど、  
おおむね下記のように、どの参考書にも書いてあるね。  
この章では、これらのポイントを例を挙げながら説明しておくことにするね。

- 1) まずは共通因子をくくり出して整理する。
- 2) 一つの文字について整理する。  
その際、次数の低い文字について整理すると簡単になる場合が多い。
- 3) 頻繁に出てくる2次3項の式はたすき掛け  
解と係数の関係を満たす解を手作業で見つける方法がたすき掛け。
- 4) 因数定理で、まず1次の因数を探し出す。
- 5) 「こうだったらいいのにな！」の形、すなわち「知っている公式」の形に持ち込む。
- 6) 対称式・交代式の性質から因数分解

### 1) まずは共通因子をくくり出して整理する。

これは、組み合わせに注目することで  
初期的な共通因子があぶり出せることが多いね！

#### [例 1-1]

$x^3 - 3x^2 - 2x + 6$  と問題があれば、

この場合、次数が1次ずつ順序良く並び、前2つの係数も後ろ2つの係数も1:3

↓

$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = x^2(x-3) - 2(x-3)$ と進めていけるね。

あるいは、一つ飛びの比 1項:3項と2項:4項はともに1:2とも言える

↓

$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = x(x^2 - 2) - 3(x^2 - 2)$ と進めていける。

係数の並びに規則性を見つけることがポイントだけど、  
トレーニングを積んでいけば次第に感覚でつかめてくるよ。

## 第9章：覚えて忘れろ！転ばぬ先の定石 ～因数分解の定石とQ&A～

[例 1-2]

$x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  と問題があれば、

[例1-1]の発想は残念ながら身を結ばないね！

↓

**比が違う！他に何か隠れていないか？**

ここで、因数分解や式の変形に慣れてくれば、

2乗+2乗、3乗+3乗などの公式の候補が次々と頭を去来する。

そうすると、「8が2の3乗であると考えれば・・・」という発想がやってくる。

そして、 $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ では？という候補が浮かんでくるんだね。

↓

残った $-3x^2 - 6x = -3x(x+2)$

みごとに共通因子があぶり出されてきた！

### ■ 因数分解のセンスを磨くポイント 001 ■

多項式は、係数の並びに注意して共通因子を見つけ出す  
係数の比やべき乗でブロック分割をどうすればよいか？を見つけていく

2)一つの文字について整理する。

その際、次数の低い文字について整理すると簡単になる場合が多い。

[例 2-1]

$b^2c - bc^2 - c^2a + abc + 2b^2 + 2ab - 2bc - 2ca$  を因数分解せよ。

↓

対称性も交代性も全く無縁のようだ！

さんざんやっていることだけれど、次数の低い文字について整理する。

この場合は、 $a$ の次数が低いから、 $a$ について整理してみる。

↓

$$\begin{aligned} & b^2c - bc^2 - c^2a + abc + 2b^2 + 2ab - 2bc - 2ca \\ &= (-c^2 + bc + 2b - 2c)a + (b^2c - bc^2 + 2b^2 - 2bc) \\ &= \{c(b-c) + 2(b-c)\}a + \{bc(b-c) + 2b(b-c)\} \\ &= (b-c)(c+2)a + (b-c)(c+2)b \\ &= (b-c)(c+2)(a+b) = (a+b)(b-c)(c+2) \end{aligned}$$

↓

## 第9章：覚えて忘れろ！転ばぬ先の定石 ～因数分解の定石とQ&A～

次に、ために、 $a$  より次数が高い  $b$  について整理してみようか！

↓

$$\begin{aligned} & b^2c - bc^2 - c^2a + abc + 2b^2 + 2ab - 2bc - 2ca \\ &= (c+2)b^2 + (-c^2 + ac + 2a - 2c)b - (c^2a + 2ca) \\ &= (c+2)b^2 + \{-c(c-a) - 2(c-a)\}b - ca(c+2) \\ &= (c+2)b^2 - (c+2)(c-a)b - ca(c+2) \\ &= (c+2)\{b^2 - (c-a)b - ca\} = (c+2)(b+a)(b-c) = (c+2)(a+b)(b-c) \end{aligned}$$

↓

どうだい、先のやり方と差があると言えば差があるけれど、記号の付いた係数の「たすき掛け」に慣れてさえいれば、そんなに「損した！」とまでは感じない・・・かも。

ただ、記号の付いた係数の「たすき掛け」に慣れていない子や嫌いな子には、やっぱり、次数が低い  $a$  について整理した方が解決しやすいだろうね。

さて、例えば、 $a^3 + ab + bc + c^3$  などはどうだろう？  
もともと一つの文字  $a$  について整理された式と見ることができるけれど、これでは何も打開策が見つからないね。  
 $c$  についても同じことが言える！

では、次数の低い  $b$  でまとめるとどうだろうか？

$$a^3 + ab + bc + c^3 = (a+c)b + (a^3 + b^3)$$

ほら、これだけで  $a+c$  が共通因子として出てくることが分かるね。

3乗+3乗の公式より、

$$\begin{aligned} a^3 + ab + bc + c^3 &= (a+c)b + (a^3 + c^3) \\ &= (a+c)b + (a+c)(a^2 - ca + c^2) \\ &= (a+c)(a^2 + b - ca + c^2) \end{aligned}$$

と因数分解できるね。